Sucesiones y Series numéricas en $\mathbb{R}$ y en $\mathbb{C}$

Definición: una sucesión en $\mathbb{R}$ ($\mathbb{C}$) es una función $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ ($\mathbb{C}$)

Notación $a(n) = a_n$

$(a_n)_{n=1}^{\infty}$

Ej: $a_n = \frac{1}{n}$

$a_n = (-1)^n$

Sucesión acotada en $\mathbb{R}$ ($\mathbb{C}$): si existe M tal que $|a_n| < M$ para todo $n \in \mathbb{N}$

Serie: Dada una sucesión $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ en $\mathbb{R}$ ($\mathbb{C}$),

la serie de término general a_n es la sucesión:

$$S_1 = a_1$$
$$S_2 = a_1 + a_2$$
$$S_3 = a_1 + a_2 + a_3 = \sum_{k=1}^{3} a_k$$
$$\vdots$$
$$S_N = a_1 + a_2 + \dots + a_N = \sum_{k=1}^{N} a_k$$

Sucesión de sumas parciales

Ejemplo:

$\boxed{a_n = (-1)^n}$:

$S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$

$(-1)^1 + (-1)^2 + \dots + (-1)^n$

$$S_1 = -1$$
$$S_2 = (-1) + (-1)^2 = 0$$
$$S_3 = (-1) + (-1)^2 + (-1)^3 = -1$$
$$\vdots$$
$$S_n = \frac{(-1)^n - 1}{2}$$

$\boxed{a_n = \frac{i^n}{n}}$

$S_n = i^1 + \frac{i^2}{2} + \frac{i^3}{3} + \dots + \frac{i^n}{n}$

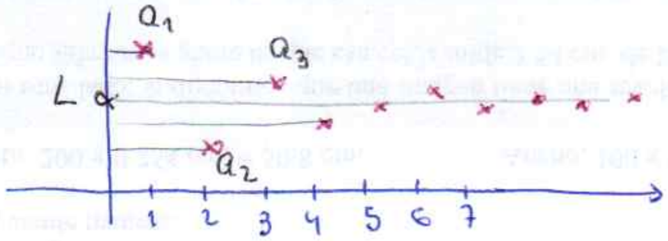
$$S_1 = i$$
$$S_2 = i - \frac{1}{2}$$
$$S_3 = i - \frac{1}{2} - \frac{i}{3}$$
$$S_4 = i - \frac{1}{2} - \frac{i}{3} + \frac{1}{4}$$

Convergencia

$(a_n \xrightarrow{n\to\infty} L$

$(a_n)_{n=1}^{\infty}$ converge a L $\left(\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L\right)$ si:

dado $\varepsilon > 0$, existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tal que: si $n \geq N_0 \Rightarrow |a_n - L| < \varepsilon$



Para series? igual! si serie es una sucesión!

la serie $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$ converge a L si

dado $\varepsilon > 0$ existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq N_0 \Rightarrow \underbrace{|S_n - L| < \varepsilon}_{\left|\sum\limits_{k=1}^{n} a_k - L\right| < \varepsilon}$

se denota: $\boxed{\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} a_k = L}$

Se usa la notación: $\boxed{\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k = L}$

Si una sucesión converge a L: "es convergente". Caso contrario: "es divergente"

Ejemplos

$a_n = \frac{1}{n}$ $\quad \lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0 \rightarrow$ convergente

$a_n = 2^n$ $\quad \lim\limits_{n\to\infty} 2^n \neq L \rightarrow$ diverge

$a_n = (-1)^n$ $\quad \lim\limits_{n\to\infty} (-1)^n \nexists \rightarrow$ diverge

Ejemplos

$$a_k = (-1)^k \qquad S_n = \sum_{k=1}^{n} (-1)^k = -1+1-1+1 \dots + (-1)^n = \frac{(-1)^n - 1}{2}$$

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^n-1}{2} \quad \nexists$$

la serie diverge

$\boxed{\text{V.I.S. (very important serie)}}$

$a_k = q^k$, $q \in \mathbb{R}$ o $q \in \mathbb{C}$. $q \neq 0$

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} (q)^k = q^0 + q^1 + q^2 + \dots + q^n$$

$$(q^0+q^1+q^2+ \dots + q^n)(1-q) = q^0+q^1+q^2+\dots+q^n - q^1 - q^2 - \dots - q^{n+1} =$$
$$= q^0 - q^{n+1} = 1 - q^{n+1}$$

si $q \neq 1$: $S_n = q^0 + q^1 + \dots + q^n = \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q}$

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1-q^{n+1}}{1-q} \underset{q=\rho e^{i\theta}}{=} \lim_{n\to\infty} \frac{1-\rho^{n+1} e^{i(n+1)\theta}}{1-q}$$

si $q = 1$?

$$\boxed{\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \lim_{n\to\infty} S_n = \begin{cases} \dfrac{1}{1-q} & \text{si } \rho = |q| < 1 \\ \nexists & \text{si } \rho = |q| \geq 1 \end{cases}}$$

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} q^k \underset{\text{si } |q|<1}{=} \frac{1}{1-q} = \sum_{k=0}^{\infty} q^k$$

Propiedades

① Si $a_n \leq b_n \leq c_n$ para todo $n > N_0$, $N_0 \in \mathbb{N}$ y $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} c_n = L \Rightarrow \lim_{n\to\infty} b_n = L$ | $(a_n), (b_n), (c_n)$ sucesiones reales

② $\lim_{n\to\infty} a_n = L \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} |a_n - L| = 0$

(en $\mathbb{R}$ y en $\mathbb{C}$)

$\lim_{n\to\infty} a_n = L \Rightarrow \lim_{n\to\infty} |a_n| = |L|$

$\lim_{n\to\infty} a_n = 0 \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} |a_n| = 0$

③ Aritmética de límite:

Si $\lim_{n\to\infty} a_n = L$ y $\lim_{n\to\infty} b_n = H$, α, β constantes

- $\lim_{n\to\infty} \alpha a_n + \beta b_n = \alpha L + \beta H$ $\left(\lim_{n\to\infty} a_n + i b_n = L + iH\right)$
- $\lim a_n b_n = L \cdot H$
- Si $b_n \neq 0$, $H \neq 0$: $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{L}{H}$

④ Si la serie $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ converge $\Rightarrow \lim_{k\to\infty} a_k = 0$

⑤ Si $a_k = x_k + i y_k$ $(x_k \in \mathbb{R}, y_k \in \mathbb{R})$

$$X = \sum_{k=0}^{\infty} x_k, \quad Y = \sum_{k=0}^{\infty} y_k \Leftrightarrow \sum_{k=0}^{\infty} a_k = X + iY$$

(convergencia de $\sum x_k$ y de $\sum y_k \longleftrightarrow$ convergencia de $\sum a_k$)

Ejemplo: ak = (1/2)^k + i (-1)^k

Convergencia absoluta de series.

La serie $\left(S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k\right)_{n=1}^{\infty}$ converge absolutamente si

la serie $\left(\sum_{k=1}^{n} |a_k|\right)_{n=1}^{\infty}$ converge.

Ejemplo: $S_n = \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{i}{2}\right)^k$ conv. absolutamente,

ya que $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \left|\left(\frac{i}{2}\right)^k\right| = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{1}{2}\right)^k = \lim_{n\to\infty} \frac{1-(1/2)^{n+1}}{1-1/2} = \frac{1}{1-1/2}$

$\boxed{\text{Si una serie converge absolutamente} \Rightarrow \text{converge}}$

Ejemplo $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{i^k}{k}$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left|\frac{i^k}{k}\right| = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \quad \text{diverge}$$

$\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \frac{i^k}{k}$ no converge absolutamente.

Sobre convergencia de series

(A) Si la serie $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ converge $\Rightarrow \lim_{k\to\infty} a_k = 0$

- no es cierta la recíproca: $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ diverge a pesar de que $\frac{1}{k} \xrightarrow{k\to\infty} 0$
- Contrarecíproca: si $\lim_{k\to\infty} a_k \neq 0 \Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} a_k$ diverge

(B) Si la serie $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ converge absolutamente $\Rightarrow$ converge.

- no es cierta la recíproca: $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k}$ converge, pero no absolutamente.

(C) Si la serie de términos reales no negativos a_k es acotada
(es decir, existe M / $\sum_{k=1}^{n} a_k \leq M$ para todo $n \in \mathbb{N}$)
$\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} a_k$ converge

(D) Sean a_k, b_k ~~reales~~ reales no negativos y $0 \leq a_k \leq b_k$ para todo k.

- Si $\sum b_k$ converge $\Rightarrow \sum a_k$ converge
- Si $\sum a_k$ diverge $\Rightarrow \sum b_k$ diverge

CRITERIO DE COMPARACIÓN

(E) Sean a_k, b_k reales positivos y sea $l = \lim_{k\to\infty} \frac{a_k}{b_k}$, $l \neq 0$

$\sum a_k$ converge $\Leftrightarrow \sum b_k$ converge

CRITERIO DE COMPARACIÓN AL LÍMITE

(F) Sean a_k reales positivos, y sea $L = \lim_{k\to\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k}$

- Si $L>1 \Rightarrow \sum a_k$ diverge
- Si $L<1 \Rightarrow \sum a_k$ converge

CRITERIO DE D'ALAMBERT O DEL COCIENTE

Si $z_k \in \mathbb{C}$ y $a_k = |z_k| \neq 0$

- si $L>1 \Rightarrow \sum |z_k|$ diverge y $\sum z_k$ diverge
- si $L<1 \Rightarrow \sum |z_k|$ converge $\Rightarrow \sum z_k$ converge absolutamente $\Rightarrow \sum z_k$ converge

(G) Sean a_k reales positivos y sea $\rho = \lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{a_k}$

- si $\rho>1 \Rightarrow \sum a_k$ diverge
- si $\rho<1 \Rightarrow \sum a_k$ converge.

CRITERIO DE CAUCHY O DE LA RAIZ

Si $z_k \in \mathbb{C}$ y $a_k = |z_k| \Rightarrow$

- si $\rho>1 \Rightarrow \sum |z_k|$ diverge y $\sum z_k$ diverge
- si $\rho<1 \Rightarrow \sum |z_k|$ converge $\Rightarrow \sum z_k$ converge absolutamente $\Rightarrow \sum z_k$ converge

(H) Sea $f: [1,\infty) \to \mathbb{R}$ continua por tramos, $f>0$, f decreciente.
Además, existe y es finito $\lim_{b\to\infty} \int_1^b f(x)dx = \int_1^\infty f(x)dx$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \underbrace{f(k)}_{a_k} \text{ converge}$$

CRITERIO DE LA INTEGRAL

Ej: $f(x) = \frac{1}{x^2}$

$\int_1^b \frac{1}{x^2}dx = -\frac{1}{b} + 1 \xrightarrow[b\to\infty]{} 1$

$\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ converge

$S_n = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \dots + \frac{1}{n^2}$

(I) (Series de términos alternados)

Sean a_k reales ~~positivos~~, $0 \le a_{k+1} < a_k$, $\lim_{k\to\infty} a_k = 0$

$\Rightarrow \sum (-1)^k a_k$ converge

CRITERIO DE LEIBNIZ

Ej: $a_k = \frac{1}{k}$ satisface hipótesis.

$\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k}$ converge.

$S_n = -1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{(-1)^n}{n}$

(J) Sean a_k, b_k reales, tales que $\sum a_k$ tiene sumas parciales acotadas* y $0 \le b_{k+1} < b_k$ para todo k y $\lim_{k\to\infty} b_k = 0$

CRITERIO DE DIRICHLET-ABEL

$\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k$ converge

*: significa: existe M tal que $|S_n| = |\sum_{k=1}^{n} a_k| \le M$

(J') El criterio J vale también si $a_k \in \mathbb{C}$.

Ej $a_k = e^{ik\theta}$, $\theta \ne 2\pi \cdot m$, $m \in \mathbb{Z}$.

$$\left|\sum_{k=0}^{n} a_k\right| = \left|\sum_{0}^{n} (\underbrace{e^{i\theta}}_{q})^k\right| = \left|\frac{1 - e^{i\theta(n+1)}}{1 - e^{i\theta}}\right| \le \frac{1 + |e^{i\theta(n+1)}|}{|1 - e^{i\theta}|} = \frac{2}{|1 - e^{i\theta}|} = M$$

$e^{i\theta} \ne 1$

$$\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

$q \ne 1$

$b_k = \frac{1}{k+1} \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$

$\Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^{ik\theta}}{k+1}$ converge

Límites conocidos de sucesiones.

(a) $\lim\limits_{n\to\infty} a^n = \begin{cases} 0 & \text{si } |a|<1 \\ \nexists & \text{si } |a|>1 \text{ o } a=-1 \\ 1 & \text{si } a=1 \end{cases}$

$a \in \mathbb{R}$

(a') $\lim\limits_{n\to\infty} z^n = \lim \rho^n e^{in\theta} = \begin{cases} 0 & \text{si } \rho<1 \\ \nexists & \text{si } \rho>1 \text{ o } (\rho=1,\ \theta\neq 2k\pi) \\ 1 & \text{si } \rho=1,\ \theta=2k\pi,\ k\in\mathbb{Z} \end{cases}$

$z\in\mathbb{C}$

$z=\rho e^{i\theta}$ si $z\neq 0$

si $\rho=1$: $\lim\limits_{n\to\infty} z^n = \lim\limits_{n\to\infty} e^{in\theta} = \lim\limits_{n\to\infty}(\cos(n\theta)+i\,\mathrm{sen}(n\theta)) = \begin{cases} \nexists & \theta\neq 2k\pi \\ 1 & \theta=2k\pi \end{cases}$ $k\in\mathbb{Z}$

(b) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$

(c) $\lim\limits_{n\to\infty} n! \ \nexists$

(d) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$

(e) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\ln(n)}{n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\ln(n)}{n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1/n}{1} = 0$

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n}\ln\left(\frac{1}{n}\right) = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{-\ln(n)}{n} = 0$

(f) $\lim \sqrt[n]{a} = 1$ para todo real $a>0$

$\lim \frac{1}{n^a} = 0$ para todo real $a>0$

(g) $\lim \frac{a^n}{n!} = 0$ para todo real $a>1$

Límite de series

(I) $\sum_{k=1}^{n} (-1)^k = S_n = (-1) + 1 + (-1) + \dots + (-1)^n = \frac{(-1)^n - 1}{2}$

$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} (-1)^k = \lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^n - 1}{2} \nexists$

$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k$ diverge

(II) V.I.S.

$$\boxed{\sum_{k=0}^{\infty} q^k} = \begin{cases} \frac{1}{1-q} & \text{si } |q|<1 \\ \nexists & \text{si } |q| \geq 1 \end{cases}$$

Serie geométrica

(II') $$\sum_{k=0}^{\infty} (-q)^k = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k q^k = \begin{cases} \frac{1}{1-(-q)} = \frac{1}{1+q} & \text{si } |q|<1 \\ \nexists & \text{si } |q| \geq 1 \end{cases}$$

(II'') $$\underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} (-q^2)^k}_{\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k q^{2k}} = \begin{cases} \frac{1}{1+q^2} & \text{si } |-q^2|<1 \quad (\Leftrightarrow |q|<1) \\ \nexists & \text{si } |-q^2| \geq 1 \end{cases}$$

(III) $\boxed{S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}$ → serie armónica

$$S_{2n} - S_n = \underbrace{\frac{1}{n+1}}_{\geq \frac{1}{2n}} + \underbrace{\frac{1}{n+2}}_{\geq \frac{1}{2n}} + \dots + \underbrace{\frac{1}{2n}}_{\geq \frac{1}{2n}} \geq \underbrace{\frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} + \dots + \frac{1}{2n}}_{n \text{ términos}} = n \cdot \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}$$

Si existe $L = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} S_{2n} \Rightarrow \lim S_{2n} - \lim S_n \geq \frac{1}{2}$

$0 \geq \frac{1}{2}$ ABSURDO!

$\Rightarrow$ no existe $\lim_{n\to\infty} S_n \Rightarrow$ la serie diverge

(IV) $\boxed{S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!}}$

Usando: $2^{k-1} \leq k!$

$k=1 \quad 2^0 \leq 1!$

$k=2 \quad 2 \leq 2!$

$k=3 \quad 2^2 \leq 3!$

$k=4 \quad 2^3 \leq 4!$

$$\begin{cases} a_k = \frac{1}{k!} > 0 \\ b_k = \frac{1}{2^{k-1}} \end{cases}$$

$$0 < a_k = \frac{1}{k!} \leq \frac{1}{2^{k-1}} = b_k$$

$\sum_{k=1}^{\infty} b_k = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^{k-1}} = \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^j$ converge $\Rightarrow$

por crit. comparación: $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!}$ converge

(V) $\boxed{S_n = \sum_{k=1}^{n} \operatorname{sen}\left(\frac{1}{k}\right)} = \operatorname{sen}(1) + \operatorname{sen}\left(\frac{1}{2}\right) + \operatorname{sen}\left(\frac{1}{3}\right) + \cdots + \operatorname{sen}\left(\frac{1}{n}\right)$

Sea $a_k = \operatorname{sen}(1/k) > 0$ $\quad 0 < \frac{1}{k} < \frac{\pi}{2}$

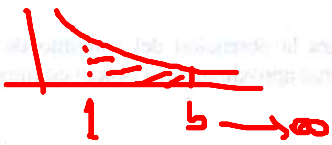
$b_k = \frac{1}{k}$

Sabemos: $\lim_{k \to \infty} \frac{a_k}{b_k} = \lim_{k \to \infty} \frac{\operatorname{sen}(1/k)}{1/k} = \lim_{t \to 0} \frac{\operatorname{sen}(t)}{t} = 1$

y que $\sum_{k=1}^{\infty} b_k = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ diverge.

$\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \operatorname{sen}\left(\frac{1}{k}\right)$ diverge (por criterio de comparación al límite)

(VI) $\boxed{S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}}$



Sea $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$. $\quad \lim_{b \to \infty} \int_1^b f(x)dx = \lim_{b \to \infty} 2\sqrt{x}\Big|_1^b =$

$= \lim_{b \to \infty} 2\sqrt{b} - 2 = \infty$

$\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k}}$ diverge (criterio de integral)